MA’RUZA

ANIQ INTEGRAL VA UNI HISOB LASH

Mavzuning rejasi

1. Aniq integralning ta’rifi.
2. Aniq integralning asosiy xossalari.
3. Aniq integralning yuqori chegarsi bo’yicha hosila.
4. Nyuton-Leybnis formulasi.
5. Aniq integralda o’zgaruvchini almashtirish.
6. Bo’laklab integrallash.

Tayanch so’z va iboralar: qismiy interavallar, qismiy interval uzunligi, funksiya qiymati, integral yig’indi, integral yig’indining geometrik ma’nosi. Aniq integral, quyi va yuqori chegaralar, eng katta va eng kichik qiymatlar, qo’sh tengsizlik, integrallash oralig’i.

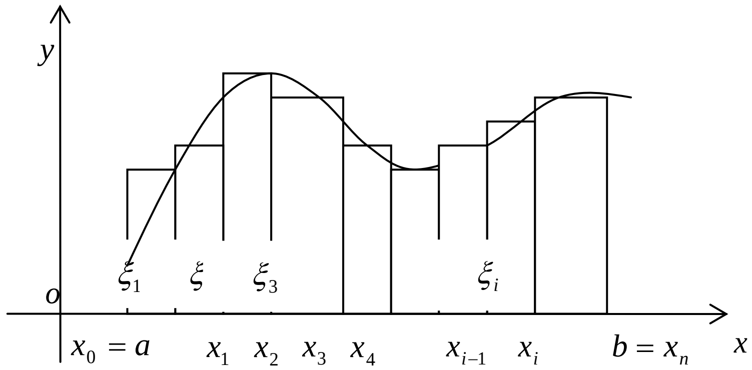
Oraliqdagi orttirma, Nton-Leybnis, yangi chegaralar, o’zgaruvchini almashtirish, bo’laklab integrallash, boshlang’ich funksiya, xususiy va umumiy usullar, ko’paytmani defferensiali, o’zgaruvchini differensiali, integrallash oralig’i, orttirma.

1. Aniq integralning ta’rifi

Aniq integral matematik analizning eng muxim tushunchalaridan biri. Egri chiziq bilan chegaralanagan yuzalarani, egr chiziqli yoylar uzunliklarini, hamda hajmlarni, bajarilgan ishlarni, yo’llarni, inersiya momentlarini va xokozalarni hisoblash masalasi shu tushuncha bilan bog’liqdir. $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo’lgan $y=f(x)$ funksiya berilgan bo’lsin. Quyidagi amallarni bajaramiz.

1. $[a,b]$ kesmani $a=x_0<x_1<x_2<...<x_{j-1}<x_j<...<x_n=b$ nuqtalar bilan n ta qismga bo’lamiz va ularni qismiy intervallar deb ataymiz.
2. Qismiy intervallarni uzunliklarini $\Delta x_1=x_1-a,\ \Delta x_2=x_2-x_1,...,\Delta x_j=x_j-x_{j-1},...,\Delta x_n=b-x_n$ bilan belgilaymiz.
3. Har bir qismiy interval ichida bittadan ixtiyoriy $\xi_1,\xi_2,...,\xi_j,...,\xi_n$ nuqta tanlab olamiz.
4. Tanlangan nuqtalarda funksiya qiymati $f(\xi_1), f(\xi_2),..., f(\xi_j),..., f(\xi_n)$ larni hisoblaymiz.
5. Funksiyaning hisoblangan qiymatlarining qismiy intervalning qismiy interval uzunligiga ko’paytiramiz. $f(\xi_1)\Delta x_1, f(\xi_2)\Delta x_2,..., f(\xi_j)\Delta x_j,..., f(\xi_n)\Delta x_n$
6. Tuzilgan ko’paytmalarni qo’shamiz va shu yig’indini σ_n bilan belgilaymiz

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1, f(\xi_2)\Delta x_2,..., f(\xi_j)\Delta x_j,..., f(\xi_n)\Delta x_n == \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



1-shakl

Integral yig'indining geometrik ma'nosi ravshan. Agar $f(x) \geq 0$ bo'lsa. U holda σ_n -asoslari $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ va balandliklari $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_j), ..., f(\xi_n)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi (1-shakl). Endi bo'lishlar soni n ni orttira boramiz $(n \to \infty)$ va bunda eng kattta intervalning uzunligi nolga intilishini, ya'ni $\max \Delta x_i \to 0$ deb faraz qilamiz.

Ta'rif: Agar σ_n integral yig'indi $[a, b]$ kesmani qismiy $[x_i, x_{i-1}]$ kesmaga ajratish usuliga va ularning har biridan ξ_i nuqtaning tanlash usuliga bog'liq bo'lmaydigan chekli songa intilsa, u holda shu son $[a, b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $[a, b]$ kesma integrallash oralig'i, a va b sonlar integrallashning quyi va yuqori chegaralari deyiladi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Aniq integralni ta'rifidan ko'rinadiki, aniq integral hamma vaqt mavjud bo'lmas ekan. Biz quyida aniq integralning mavjudlik teoremasini isbotsiz keltiramiz.

Teorema*:* Agar $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u integrallanuvchidir, ya'ni bunday funksiyaning aniq integrali mavjuddir.

1-shakldagi $y = f(x) \geq 0$ funksiyaning grafigi quyidan OX o'qi, yon tomonlaridan $x = a,\ x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralanagan sohani egri chiziqli trapesiya deb atasak, u holda $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning geometrik ma'nosi ravshan bo'lib qoladi: $f(x) \geq 0$ bo'lganda u shu egri chiziqli trapesiyaning yuziga son jihatdan teng bo'ladi.

Aniq integarlning qiymati funksiyaning ko'rinishiga va integrallash chegarasiga bog'liq.

Masalan, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$

Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o'zgaradi. $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Agar integralning chegarlari teng bo'lsa, har qanday funksiya uchun ushbu tenglik o'rinlidir $\int_a^a f(x)dx = 0$ Bularni isbotlash talabalarga mustaqil ish sifatida qoldiriladi.

2. Aniq integralning asosiy xossalari

1-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k = const)$$

Isbot: $\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = = k\int_a^b f(x)dx$ bo'ladi.

2-xossa. Bir nechta funksiyaning algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3-xossa. Agar $[a,b]$ kesmada ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $(a < b)$

$f(x) \geq g(x)$ shartni qanoatlantirsa, ushbu tenglik o'rinli bo'ladi: $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Isboti: Shartga ko'ra $f(x) \geq g(x)$ bo'lgani uchun $f(x) \geq g(x) \geq 0$ bo'ladi.

Demak $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0$ bo'ladi, bundan $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$ yoki

$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ kelib chiqadi.

4-xossa. Agar $[a,b]$ kesma bir necha qismga bo'linsa, u holda $[a,b]$ kesma bo'yicha aniq integral har bir qism bo'yicha olingan aniq integrallar yig'indisiga teng. $[a,b]$ kesma ikki qismga bo'lingan hol bilan cheklansak, $a < c < b$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ bo'ladi.

5-xossa. Agar m va M sonlar $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlari bo'lsa, ushbu tengsizlik o'rinli bo'ladi $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

6-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzlusiz bo'lsa, bu kesmani ichida shunday $x = c$ nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning qiymati uning shu kesmadagi o'rtacha qiymatiga teng bo'ladi, ya'ni $f(c) = f_{ўрт}$ yoki

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

3. Aniq integralning yuqori chegarsi bo'yicha hosilash

7-xossa. Aniq integralda integrallashning quyi chegarasi a o'zgarmas bo'lib, yuqori chegarsi x esa o'zgaruvchi bo'lsa, u holda integralning qiymati ham o'zgaruvchi bo'ladi, ya'ni integral yuqori chegarasini funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyani $\Phi(x)$ bilan belgilaymiz

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad x \in [a,\, b]$$

Teorema: Agar $f(x)$ funksiya $x = t$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $\Phi(x)$ funksiyaning hosilasi integral ostidagi funksiyaning yuqori chegarasidagi qiymatiga teng, ya'ni

$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$ yoki $\Phi'(x) = f(x)$. Bundan $\Phi(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekanligi kelib chiqadi.

Isbotlanmagan xossalar talablarga mustaqil ish uchun qoldirildi. Oxirgi teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Bu teoremaga aniq integralni yuqori chegarasi bo'yicha hosila deyiladi.

4. Nyuton-Leybnis formulasi

Aniq integrallarni integral yig'indining limiti sifatida bevosita hisoblash ko'p hollarda qiyinchilik tug'diradi, ya'ni uzoq hisoblashlarni talab qiladi va amalda juda kam ishlatiladi. Aniq integrallarni topish asosan Nton-Leybnis formulasi deb ataluvchi quymdagi teorema bilan berilgan bo'ladi.

Teorema: Agar $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda aniq integral boshlang'ich funksiyaning integrallash oralig'idagi orttirmasiga teng, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

(2) tenglikka Nyuton-Leybnis formulasi deyiladi.

Isbot:. $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda 7-ma'ruzadagi 1-teoremaga asosan $\int_a^b f(t)dt$ funksiya ham $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Berilgan funksiyaning ikkita istalgan boshlang'ich funksiyalari bir-biridan o'zgarmas C qo'shiluvchiga farq qiladi, ya'ni $\Phi(x) = F(x) + C$. Shuning uchun: $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$, C - o'zgarmas miqdorni aniqlash uchun bu tenglikda $x = a$ deb hisoblasak $\int_a^b f(t)dt = F(a) + C$. Aniq integrlning xossasiga asosan, $\int_a^a f(t)dt = 0$ bo'lgani uchun $F(a) + C = 0$. Bundan $C = -F(a)$ Demak, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Endi $x = b$ deb oxirgi tenglikni hisoblasak, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ ni hosil qilamiz. Bu tenglikda integrallash o'zgaruchisini x bilan almashtirsak

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ Nyuton- Leybnis formulasini hosil qilamiz.

$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ Belgilash kiritib, oxirgi formulani quyidagicha qayta yozish mumkin

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Teorema isbotlandi.

Demak, integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ ma'lum bo'lsa, u holda Nyuton-Leybnis formulasi aniq integrallarni hisoblash uchun amalda qulay usuldan iborat ekan. Faqat shu formulaning kashf etilishi aniq integralning hozirgi zamonda matematik analizda katta o'ringa ega ekanligiga imkon yaratgan. Nyuton-Leybnis formulasi aniq integralning tatbiqi sohasini ancha kengaytiradi, chunki matematika bu formula yordamida xususiy ko'rinishdagi turli masalalarni yechish uchun umumiy usulga egi bo'ldi.

Misollar ko'rib o'tamiz. Quyidagi aniq integrallarni hisoblang:

1. $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}} =$

$= \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

5. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish

Bizga $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral berilgan bo'lsin, bunda $f(x)$ funksiyani $[a,b]$ kesmada uzluksiz deb faraz qilamiz va $x = \varphi(t)$ deb yangi o'zgaruvchini kiritamiz, bunda $\varphi(t)$ funksiya va uning hosilasi $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Faraz qilaylik $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ bo'lsin. Bu shartlar bajarilganda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Bu tenglikni isboti uchun formulani chap va o'ng tomonlariga Nyuton-Leybnis formulasini qo'llaymiz

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (*)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\beta)) = F(b) - F(a) \qquad (**)$$

Oxirgi ikki va tengliklarni o'ng tomonlari o'zaro teng bo'lganligidan ularni chap tomonlari ham teng bo'lishligini bilamiz. Demak, formula isbotlandi. Aniq integralni formula bo'yicha hisoblaganda yangi o'zgaruvchidan eski o'zgaruvchiga qaytish kerak emas, balki eski o'zgaurvchining chegaralarini keyingi boshlang'ich funksiyaga qo'yish kerak.

Misollar ko'rib o'tamiz. Quyidagi aniq integrallarni o'zgaruvchini almashtirish usulida hisoblang.

1. $\int_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

Yechish: $1 + x^2 = t^2$ deb almashtirish kiritamiz, $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$ bo'lganligidan va integrallashni yangi chegaralari $x = 3$ bo'laganda $t = 2$ hamda $x = 8$ bo'lganda $t = 3$ ekanligini hisobga olib berilgan integralni quyidagi xolga keltirib integrallaymiz:

$$\int_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{2} - t\right)\Bigg|_2^3 = = 2\cdot(6 - \frac{2}{3}) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

2. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$

Yechish: Bunda $x = \sin t$ deb almashtirish olamiz, u holda $dx = \cos tdt$ va integrallashni yangi chegaralarini $x = 0$ bo'lganda $t = 0$ hamda $x = 1$ bo'lganda $t = \frac{\pi}{2}$ larni topib berilgan integralga qo'ysak:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$=\frac{1}{2}\left(t-\tfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right]=\frac{\pi}{4}\quad \text{bo'ladi.}$$

6. Aniq integralni bo'laklab inegrallash

Faraz qilamiz, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada differensillanuvchi funksiyalar bo'lsin. U holda $(uv)'=u'v+uv'$ bo'lishini bilamiz. Bu tenglikni har ikkala tamonini a dan b gacha bo'lgan oraliqda integrallaymiz. $\int_a^b (uv)'\,dx=\int_a^b u'vdx+\int_a^b v'udx$ Lekin bizga ma'lumki $\int (uv)'\,dx=uv+C$ ekanligi sababli $\int (uv)'\,dx=uv\Big|_a^b$ bo'ladi. U holda tenglikni $uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu+\int_a^b udv$ shaklda yozsak, bundan $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$ kelib chiqadi. Oxirgi formulaga, aniq integralda bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

Misollar: Quyidagi aniq integralni bo'laklab integrallang.

1. $\int_0^1 arctgxdx$

Yechish:

$$\int_0^1 arctgxdx=\left|\begin{matrix} u=arctgx, & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx, & v=x \end{matrix}\right|=x\cdot arctgx\Big|_0^1-\int_0^1\frac{xdx}{1+x^2}==arctg1-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\,.$$

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos dx=\left|\begin{matrix} u=e^{2x}, & du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos dx, & v=\sin x \end{matrix}\right|=e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}--2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin xdx=e^{\pi}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin xdx\,.$$

Keyingi integralni yana bo'laklab, integrallaymiz. Buning uchun $u=e^{2x}$, $du=2e^{2x}$, $dv=\sin xdx$, $v=\cos x$ bo'ladi va

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin xdx=-e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx==1+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx=1-2I\,.$$

Buni berilgan integralga qo'ysak $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx=e^{\pi}-2-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx$.

O'xshashlarini integrallab quyidagi natijaga ega bo'lamiz $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx=\dfrac{e^{\pi}-2}{5}$.